

新定义

一、解答题

1. 若数列 $\{A_n\}$ 满足 $\frac{1}{2} \leq \frac{A_{n+1}}{A_n} \leq 2 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则称 $\{A_n\}$ 是“紧密数列”. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(1) 试判断 $\{a_n\}$ 是否为“紧密数列”, 并说明理由.

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 是“紧密数列”, 已知 $b_n = c^n \cdot a_n$ (c 为常数), 且 $4b_3 = 9b_2 - 2b_1$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

2. 已知 $\{a_n\}$ 是无穷正整数数列, 定义操作 $D(k, s)$ 为删除数列 $\{a_n\}$ 中除以 k 余数为 s 的项, 剩下的项按原先后顺序不变得到新数列 $\{b_n\}$. 若 $a_n = 3^{n-1}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 进行操作 $D(3, 1)$ 后剩余项组成新数列 $\{b_n\}$, 设数列 $\{\log_3(a_n + b_n)\}$ 的前 n 项和为 S_n .

(1) 求 S_n ;

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \log_3 b_{2n-1}$, 求数列 $\left\{\frac{1}{c_n c_{n+1}}\right\}$ 的前20项和.

3. 若数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列, 则称数列 $\{a_n\}$ 为调和数列. 若实数 a 、 b 、 c 依次成调和数列, 则

称 b 是 a 和 c 的调和中项.

(1) 求 $\frac{1}{3}$ 和 1 的调和中项;

(2) 已知调和数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 6$, $a_4 = 2$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

4. 设数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ ($n \in N^*$), 则称数列 $\{a_n\}$ 为“凸数列”.

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 为“凸数列”, 若 $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, 试写出该数列的前 6 项, 并求出该 6 项之和;

(2) 在“凸数列”中, 求证 $a_{n+6} = a_n$, $n \in N^*$.

5. 对于数列 $\{a_n\}$, 把 a_1 作为新数列 $\{b_n\}$ 的第一项, 把 a_i 或 $-a_i$ ($i=2,3,4,\dots,n$) 作为新数列 $\{b_n\}$ 的第 i 项, 数列 $\{b_n\}$ 称为数列 $\{a_n\}$ 的一个生成数列. 例如, 数列 $1,2,3,4,5$ 的一个生成数列是 $1,-2,-3,4,5$. 已知数列 $\{b_n\}$ 为数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的生成数列, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 写出 S_3 的所有可能值;

(2) 若生成数列 $\{b_n\}$ 满足 $S_{3n} = \frac{1}{7} \left(1 - \frac{1}{8^n}\right)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

6. 已知集合 $\{x \in \mathbf{Z} \mid a_n < x < b_n, n \in \mathbf{N}^*\}$ 中元素的个数为 c_n .

(1) 若 $a_n = -n$, $b_n = 3^n$, 求 c_2 .

(2) 若 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均为等差数列且 $a_n < b_n$, $a_n, b_n \in \mathbf{Z}$, 证明: $\{c_n\}$ 也为等差数列.

(3) 若 $a_n = 2^n - \frac{2}{n}$, $b_{n+1} = 2b_n + 2$, 且 $b_1 = 10$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

7. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$ (k 为常数), 则称数列 $\{a_n\}$ 为等比和数列, k 为公比和,

已知数列 $\{a_n\}$ 是以 5 为公比和的等比和数列, 且 $a_1 = 3, a_2 = 6$, 记 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(1) 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是周期数列, 并指出其周期;

(2) 求 $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}$ 的值.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $S_n \cdot S_{n+2} < S_{n+1}^2$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是“方特数列”.

- (1)证明：数列 $\{n\}$ 是“方特数列”；
- (2)若数列 $\{a_1 q^{n-1}\} (a_1 \neq 0)$ 是“方特数列”，求 q 的取值范围；
- (3)证明：当 $q > 0$ 时，数列 $\{nq^{n-1}\}$ 是“方特数列”.

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$ ，数列 $\{b_n\}$ 为公比大于0的等比数列，且 $b_2 = a_3, b_4 = a_{27}$.

(1)求 a_n, b_n ；

(2)若在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 b_n 个1，由此构成一个新的数列 $\{c_n\}$ ，记 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n ，求 T_{45} 的值.

10. 若数列 $\{a_n\}$ 满足：当 n 为奇数时， $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ ；当 n 为偶数时， $a_n a_{n+1} = a_{n+2}$. 则称数列 $\{a_n\}$ 为和积交替数列.

(1) 若数列 $1, a, b, 6$ 为和积交替数列，分别求实数 a, b 的值；

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 为和积交替数列，且 $a_1 = 2$ ， $a_2 = t \left(t > \frac{1}{2} \right)$.

(i) 若 3 是数列 $\{a_n\}$ 中的项，求实数 t 的值；

(ii) 若 $a_2 = 2$ ，证明： $a_{2^n} \geq 2^{2^{n-1}}$.

11. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_2 = 8$ ， $S_4 = 40$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，且 $T_n - 2b_n + 3 = 0$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $c_n = \begin{cases} a_n, n \text{ 为奇数} \\ \frac{b_n}{(b_n + 1)(b_{n+2} + 1)}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n+1$ 项和 P_{2n+1} .

(3) 若从数列 $\{a_n\}$ 列中依次取出第 b_1 项，第 b_2 项，第 b_3 项，……，第 b_n 项，……并按原来的先后顺序组成一个新的数列 $\{d_n\}$ ，求数列 $\{d_n\}$ 的通项公式与前 n 项和 Q_n .

12. 已知项数为 $m(m \in \mathbf{N}^*, m \geq 2)$ 的数列 $\{a_n\}$ 满足如下条件: ① $a_n \in \mathbf{N}^* (n = 1, 2, \dots, m)$; ② $a_1 < a_2 < \dots < a_m$. 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_m) - a_n}{m-1} \in \mathbf{N}^*$, 其中 $n = 1, 2, \dots, m$, 则称 $\{b_n\}$ 为 $\{a_n\}$ 的“心灵契合数列”.

(I) 数列 1, 5, 9, 11, 15 是否存在“心灵契合数列”若存在, 写出其心灵契合数列, 若不存在请说明理由;

(II) 若 $\{b_n\}$ 为 $\{a_n\}$ 的“心灵契合数列”, 判断数列 $\{b_n\}$ 的单调性, 并予以证明;

(III) 已知数列 $\{a_n\}$ 存在“心灵契合数列” $\{b_n\}$, 且 $a_1 = 1$, $a_m = 1025$, 求 m 的最大值.